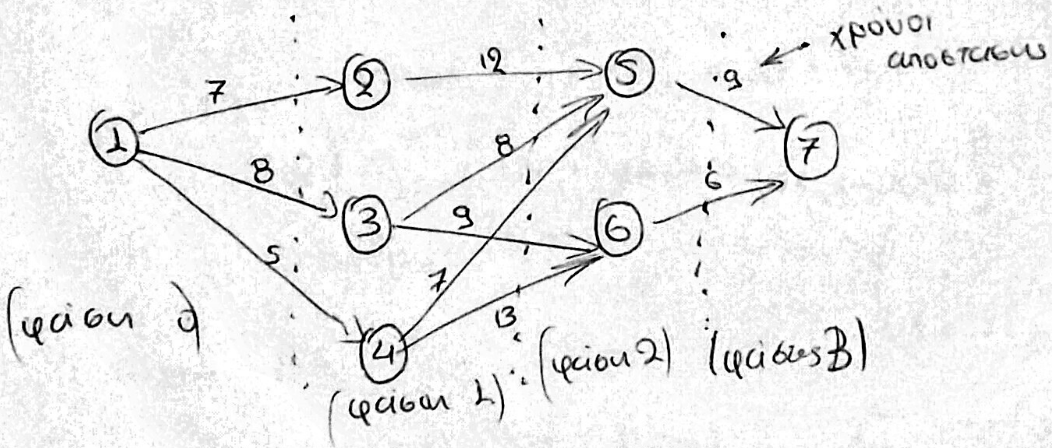
Επιχειρησιακή Έρευνα 25/10 (1)

Δυναμικός Προγραμματισμός

Αρχή βελτιστοποίησης (Bellman 1952)

Μια βέλτιστη πολιτική έχει την ιδιότητα όποια και αν είναι η αρχική κατάσταση ή αρχική απόφαση οι υπόλοιπες αποφάσεις πρέπει να αποτελούν μια βέλτιστη πολιτική σε σχέση με την κατάσταση η οποία προκύπτει από την πρώτη απόφαση.

Πρόβλημα συντομότερης διαδρομής



Φάση 1: Συντομότερη απόσταση από τον 1 στον 2 : 5

3 : 8

4 : 5

Φάση 2: (Συντομότερη απόσταση προς τον κόμβο 5) $= \min_{i=2,3,4} \left\{ \right.$ (μικρότερη απόσταση προς τον κόμβο i) + (απόσταση από τον κόμβο i στον 5) $\left. \right\}$

$= \min\{7+12,\ 8+8,\ 5+7\} = 12$ (από τον κόμβο 4)

$$\begin{pmatrix}\text{συντομότερη απόσταση}\\ \text{προς τον κόμβο 6}\end{pmatrix} = \min_{i=3,4}\left\{\begin{pmatrix}\text{μικρότερη}\\ \text{απόσταση}\\ \text{από τον κόμβο } i\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{απόσταση}\\ \text{από τον}\\ i \text{ στον } 6\end{pmatrix}\right\} =$$

$= \min\{8+9,\ 5+13\} = 17$ (από τον 3)

<u>Φάση 3</u>:
$$\begin{pmatrix}\text{συντομότερη απόσταση}\\ \text{προς τον κόμβο 7}\end{pmatrix} = \min_{i=5,4}\left\{\begin{pmatrix}\text{μικρότερη}\\ \text{απόσταση}\\ \text{από τον}\\ \text{κόμβο } i\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{απόσταση}\\ \text{από τον}\\ i \text{ στον } 7\end{pmatrix}\right\} =$$

$= \min\{12+9,\ 17+6\} = 21$ (από τον 5)

Ορίζω $f_i(x_i)$ η συντομότερη απόσταση προς τον κόμβο x στη φάση i

$d(x_{i-1}, x_i)$ η αποστασταση από τον x_{i-1} στον x_i

$f_0(x_0=1) = 0$

$$f_i(x_i) = \min_{\substack{\text{για όλες}\\ \text{τις εφικτές}\\ \text{διαδρομές } (x_{i-1},x_i)}} \{ d(x_{i-1}, x_i) + f_{i-1}(x_{i-1}) \} \qquad i = 1, 2, 3$$

$f_0(x_0=1) = 0$

Φάση 1

x_1	$d(x_0,x_1) + f_0(x_0)$, $x_0=1$	βέλτιστη	x_0^*
2	7	7	1
3	8	8	1
4	5	5	1

Φάση 2

x_2	$d(x_1,x_2)+f_1(x_1)$			$\min\left(d(x_1,x_2)+f_1(x_1)\right)$	x_1^*
	$x_1=2$	$x_1=3$	$x_1=4$		
5	7+12	5+8	5+7	12	4
6		8+9	5+13	17	3

Φάση 3

x_3	$d(x_2,x_3)+f_2(x_3)$		$\min\left(d(x_2,x_3)+f_2(x_2)\right)$	
	$x_2=5$	$x_2=6$		
7	12+9	17+6	21	5

$\boxed{\text{Προς τα πίσω αναδρομική σχέση}}$

$f_4(x_4=7)=0$

$f_i(x_i) = \min \left\{ d(x_i, x_{i+1}) + f_{i+1}(x_{i+1}) \right\}$

για όλες τις επιτρεπτές διαδρομές (x_i, x_{i+1})

Φάση 3

x_3	$d(x_3,x_1)$	$f_3(x_3)$	x_4^*
	$x_1=7$		
5	9	9	7
6	6	6	7

Φάση 2

x_2	$d(x_2, x_3) + f_3(x_3)$		$f_2(x_2)$	x_3^*
	$x_3=5$	$x_3=6$		
2	$12+9=21$		21	5
3	$8+9=17$	$9+6=15$	15	6
4	$9+7=16$	$13+6=19$	16	5

Φάση 1

x_1	$d(x_1, x_2) + f_2(x_2)$			$f_1(x_1)$	x_2^*
	$x_2=2$	$x_2=3$	$x_2=4$		
1	$7+21$	$8+15$	$9+16$	21	4

Προβλημα Σακιδια

n αντικειμενα

W συνολικο βαρος

x_i οι μονάδες των αντικειμενων i

r_i η μοναδιαια προσοδος του αντικειμενου i

w_i το βαρος του αντικειμενου i $(i=1,\dots,n)$

$\max \; r_1x_1 + \dots + r_nx_n$

$w_1x_1 + \dots + w_nx_n \leq W$

$x_1, x_2, \dots, x_n$ μη αρνητικοι ακεραιοι

1) Η φάση i αναπαριστάται από το αντικείμενο i $(i=1,\dots,n)$

2) Οι εναλλακτικές αποφάσεις στην φάση i είναι οι μονάδες του αντικειμένου i $\quad u_i = 0, 1, \dots, \left[\frac{w}{w_i}\right]$

3) Η κατάσταση στην φάση i αναπαρίσταται από το x_i το συνολικό βάρος που εχωρείται στα αντικείμενα $i, i+1, \dots, n$

Ορίζω $f_i(x_i)$ μέγιστη απόδοση για τις καταστάσεις $i, i+1, \dots, n$ δεδομένης της κατάστασης x_i

Βήμα 1 : Εκφράζουμε το $f_i(x_i)$ ως συνάρτηση του $f_i(x_{i+1})$

$$f_{n+1}(x_{n+1}) = 0$$

$$f_i(x_i) = \max_{\substack{u_i = 0, \dots, \left[\frac{w}{w_i}\right] \\ x_i \le w}} \left\{ r_i u_i + f_{i+1}(x_{i+1}) \right\}$$

Βήμα 2 : $\quad x_i = x_{i+1} + w_i u_i$

$$f_i(x_i) = \max_{\substack{u_i = 0, \dots, \left[\frac{w}{w_i}\right] \\ x_i \le w}} \left\{ r_i u_i + f_{i+1}(x_i - w_i u_i) \right\} \qquad i = 1, \dots, n$$

Παράδειγμα

Έχω μέσον 4 τόνων μπορεί να φορτωθεί με ~~[illegible]~~ 4 ή περισσότερα αντικείμενα

Αντικείμενο	w_i	r_i
1	2	31
2	3	47
3	1	14

Ψάχνω πόσα αντικείμενα από κάθε είδος μπορώ να φορτώσω ώστε να μεγιστοποιήσω τα έσοδα.

Φάση 3

$u_3 = 1, 2, 3, 4$ αφού $w_3 = 1$ και $W = 4$ $\boxed{1 \cdot 4 = 4}$

$14 u_3$

x_3	$u_3=0$	$u_3=1$	$u_3=2$	$u_3=3$	$u_3=4$	$f_3(x_3)$	u_3^*
0	0	–	–	–	–	0	0
1	0	14	–	–	–	14	1
2	0	14	28	–	–	28	2
3	0	14	28	42	–	48	3
4	0	14	28	42	56	56	4

Φάση 2

$$f_2(x_2) = \max_{u_2=0,1} \{47 u_2 + f_3(x_2 - 3u_2)\}$$

$u_2 = 0, 1$ αφού $w_2 = 3$ και $W = 4$

αν είχαμε $u_2 = 2$ $2 \cdot 3 = 6 > 4$

x_2	$u_2=0$	$u_2=1$	$f_2(x_2)$	u_2^*
0	$0+0=0$	–	0	0
1	$0+14=14$	–	14	0
2	$0+28=28$	–	28	0
3	$0+42=42$	$47+0=47$	47	1
4	$0+56=56$	$47+14=61$	61	1

Φάση 1

$31 u_1 + f_2(x_1 - 2u_1)$

$u_1 = 0, 1, 2$ αφού $w_1 = 2$ και $W = 4$ $\boxed{2 \cdot 2 = 4}$

x_1	$u_1=0$	$u_1=1$	$u_1=2$	$f_1(x_1)$	u_1^*
0	$0+0=0$	–		0	0
1	$0+14=14$	–		14	0
2	$0+28=28$	$31+0=31$		31	1
3	$0+47=47$	$31+14=45$		47	0
4	$0+61=61$	$31+28=59$	$62+0$	62	2

Παράδειγμα

5 ιατρικές ομάδες στέλνονται σε 3 χώρες

Αριθμός Ιατρικών Μονάδων	(Χώρες) Επιπρόσθετα ανθρωποχρόνια ζωής 1	2	3
0	0	0	0
1	45	20	50
2	70	45	70
3	90	75	80
4	105	110	100
5	120	150	130

x_i: ο συνολικός αριθμός ομάδων αν εγκαθίστανται στην χώρα $i, i+1, \dots n$

Φάση 3

x_3	$f_3(x_3)$	u_3^*
0	0	0
1	50	1
2	70	2
3	80	3
4	100	4
5	130	5

Φάση 2 $f_2^*(x_2) = p_2(u_2) + f_3(x_2 - x_3)$

x_2	$u_2=0$	$u_2=1$	$u_2=2$	$u_2=3$	$u_2=4$	$u_2=5$	$f_2^*(x_2)$	u_2^*
0	0							0
1	50	20					50	0
2	70	50+20	45				70	0 ή 1
3	80	70+20	50+45	75			95	2
4	100	80+20	70+45	50+75	110		125	3
5	130	100+20	80+45	70+75	50+110	150	160	4

Φάση 1 $f_1^*(x_1) = p_1(u_1) + f_2(x_1 - u_1)$

x_1	$u_1=0$	$u_1=1$	$u_1=2$	$u_1=3$	$u_1=4$	$u_1=5$	$f_1^*(x_1)$	u_1^*
5	160	125+45	95+70	90+70	105+50	120+0	170	1

όπου $p_2(u_2)$ και $p_1(u_1)$ τα στοιχεία του πίνακα που μας έχει δοθεί.

Άρα μέγιστο $u_1 = 1$ $u_2 = 3$ και $u_3 = 1$

Ασκήσεις (για σπίτι)

1) Πρέπει να επιλέξει ένας μαθητής 10 προαιρετικά μαθήματα από 4 διαφορετικά τμήματα με τουλάχιστον 1 μάθημα από κάθε τμήμα. Τα 10 μαθήματα κατανέμονται στα 4 τμήματα με έναν τρόπο ο οποίος μεγιστοποιεί την γνώση. Ο φοιτητής μετρά την γνώση σε κλίμακα του 100 και καταλήγει στο διάγραμμα.

Τμήμα	πλήθος μαθημάτων						
	1	2	3	4	5	6	≥7
1	25	50	60	80	100	100	100
2	20	70	90	100	100	100	100
3	40	60	80	100	100	100	100
4	10	20	30	40	50	60	70

€

Με ποιον τρόπο ο φοιτητής πρέπει να επιλέξει τα μαθήματα?

2)

Αντικείμενο	βάρος	αξία
1	6	30 €
2	3	14 €
3	4	16 €
4	2	9 €

$W = 10$

~~Κα~~ Ιδέα λύσης για 1/

Οι φάσεις είναι τα τμήματα.

Έχω περιορισμό κάθε τμήμα από 1.